ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1981

OPTION BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

DEUXIEME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

N.B. Ce sujet comporte 3 pages de texte.

Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires indépendantes de densité respective f_1 et f_2, on admet que la densité de $X_1 + X_2$ est donnée par $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\, f_2(x-t)\, dt$.

I

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, un rayon lumineux part de l'origine et frappe un écran représenté par la droite d'équation $x = x_0$ $(x_0 > 0)$.

On suppose que θ, angle polaire de l'axe représentant le rayon lumineux, est une variable aléatoire uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1°) Calculer Y, ordonnée de la trace du rayon sur l'écran, en fonction de θ. Quelle est la loi de Y ?

2°) Que peut-on dire de l'espérance de Y ? de sa variance ?

II

1°) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$, de densité f continue sur $\mathbb{R}^*$, et de fonction de répartition F continue sur $\mathbb{R}$.

a. Quelle est la loi de $-X$?

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la loi de X soit la même que celle de $-X$.
On suppose que f vérifie cette propriété, quelle est alors la fonction de répartition de $|X|$? sa densité ?

2°) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes dont la densité commune est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{x^2+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

a. Quelle est la loi de $\operatorname{Log}|XY|$?

b. En déduire la loi de $|XY|$.

c. Montrer que $-XY$ et XY ont même loi. En déduire la densité de XY.

3°) Soient U et V deux variables aléatoires normales réduites centrées indépendantes.
Quelle est la densité de $\operatorname{Log}|U|$? de $-\operatorname{Log}|V|$?
En s'inspirant de la méthode utilisée dans le 2°), trouver la loi de $\frac{U}{V}$.

4°) a. Déduire de ce qui précède que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^2-1}\,dx$ converge. Donner sa valeur.

b. Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\operatorname{Log} x}{x^2-1}\,dx$.

III

1°) a. Trouver une primitive de g définie par

$$(1) \qquad g(x) = \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\beta^2}$$

A, B, C, D, et α étant des nombres réels et β étant un réel strictement positif.

b. Quelle relation doit lier A, B, C, D pour que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx \quad \text{soit convergente.}$$

La calculer dans ce cas.

2°) a. Calculer A, B, C, D pour $g(x) = \dfrac{1}{\left[(x-\alpha)^2+1\right]\left[x^2+\beta^2\right]}$

le couple (α, β) étant différent de $(0,1)$ et β strictement positif.

On pourra, par exemple, multiplier l'égalité (1) par $(x^2+\beta^2)$ et remplacer x par βi, puis multiplier (1) par $(x-\alpha)^2+1$ et remplacer x par $\alpha + i$.

b. En déduire que, si g est la fonction définie au 2°) a. on a l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \beta g(x)\,dx = \pi\,\frac{\beta+1}{\alpha^2+\beta^2+2\beta+1}$$

3°) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{x^2+1} \qquad h(y) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\beta}{y^2+\beta^2} \qquad (\beta > 0)$$

Quelle est la densité de la variable aléatoire λY , si λ est un réel non nul ? de la variable aléatoire $X + Y$?

4°) a. On note X_1 , X_2 , ... , X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi que X .

Quelle est la loi de $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$? de $S_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$?

Calculer $\text{Prob}\left(|S_n| > 1\right)$.

b. Que deviendraient les résultats de la question a. si les X_i étaient des variables aléatoires normales réduites centrées indépendantes ?

c. Quel rapport ont les questions a. et b. avec la loi faible des grands nombres ?

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail